



A.A.

2008-

2009

# *Programma di incentivazione delle Lauree Scientifiche*

**LABORATORIO DI FISICA**

**MISURA DELLA CARICA DELL'ELETTRONE  
UTILIZZANDO IL METODO DI  
MILLIKAN**

**UNIVERSITÀ DI PERUGIA  
DIPARTIMENTO DI FISICA**



## **INDICE**

	<i>Pag.</i>
<i>Introduzione</i>	<i>2</i>
<i>1 Principali nozioni di Fisica necessarie alla comprensione dell'esperimento</i>	<i>4</i>
<i>1.1 L'inizio della Fisica Moderna e la scoperta dell'elettrone</i>	<i>4</i>
<i>1.2 La carica elettrica e la forza elettrostatica</i>	<i>5</i>
<i>1.3 Caduta di un grave in un fluido</i>	<i>6</i>
<i>1.4 La forza di attrito viscoso</i>	<i>8</i>
<i>2 Il metodo di Millikan</i>	<i>9</i>
<i>2.1 Il dispositivo sperimentale</i>	<i>9</i>
<i>2.2 Condizione di equilibrio della goccia</i>	<i>11</i>
<i>2.3 Determinazione del raggio delle goccioline in assenza di campo elettrico</i>	<i>12</i>
<i>2.4 Goccia in risalita per effetto del campo elettrico</i>	<i>13</i>
<i>3 L'esperimento</i>	<i>14</i>
<i>3.1 La strumentazione</i>	<i>14</i>
<i>3.2 Come si esegue l'esperimento</i>	<i>16</i>
<i>3.3 Calcolo del valore della carica <math>q</math></i>	<i>17</i>
<i>3.3.1 Misure a) e b)</i>	<i>18</i>
<i>3.3.2 Misure a) e c)</i>	<i>19</i>
<i>3.3.3 Misure b) e c)</i>	<i>20</i>
<i>3.4 Calcolo delle incertezze</i>	<i>21</i>

## INTRODUZIONE

La carica elettrica posseduta da un elettrone o da un protone, due dei costituenti dell'atomo, è uguale e di segno opposto. Oggi sappiamo che, a differenza del protone, l'elettrone è anche una particella *elementare*, tale cioè da non avere componenti, e la sua carica elettrica è la più piccola che esista *libera* in natura<sup>1</sup>. Si dice anche che la carica elettrica è *quantizzata*, in quanto il valore di ciascuna carica elettrica deve essere un multiplo intero di quella elementare.

La carica dell'elettrone fu misurata per la prima volta nel 1909 da Robert Andrews Millikan (22 Marzo 1868 – 19 Dicembre 1953), con l'esperimento poi divenuto famosissimo *della goccia d'olio*, che noi ripeteremo in questa esperienza. Il primo lavoro fu pubblicato nel 1910, ma l'articolo definitivo solo nel 1913, dopo che Millikan ebbe concluso tutti i possibili controlli sperimentali e analizzato i dati con cura. Il risultato trovato da Millikan è sorprendentemente accurato,  $(1.592 \pm 0.0017) \times 10^{-19}$  Coulomb<sup>2</sup>. Oggi la misura più precisa della carica dell'elettrone è  $1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19}$  Coulomb (40 indica l'incertezza sulle ultime due cifre), maggiore di quella trovata da Millikan solo dello 0.6%. Per questa misura, e anche per lavori che confermarono la teoria dell'effetto fotoelettrico formulata da Einstein, Millikan ricevette il premio Nobel nel 1923.

La carica dell'elettrone, per una convenzione che risale ai tempi dei primi esperimenti di elettrostatica, quando la natura di questo fenomeno era sconosciuta, è negativa e viene di solito indicata con la lettera "e"; essa costituisce una delle costanti fondamentali della natura, come il valore "c" della velocità della luce, o quello "h" della costante di Planck.

In questa esperienza useremo un dispositivo che permette di replicare la misura di Millikan; il metodo usato da Millikan è in principio molto semplice: goccioline di olio vengono nebulizzate e immesse tra due piatti metallici tra cui è applicata una elevata differenza di potenziale. Alcune delle goccioline si caricano elettricamente per frizione e possono essere individuate perché soggette alla forza esercitata dal campo elettrico che è tale da spingerle verso l'alto. Le goccioline prive di carica cadono per gravità, anche se questa è parzialmente compensata dalla spinta di Archimede e dalla viscosità.

Una volta osservata una goccia carica, bisogna misurarne il raggio e la carica elettrica: servono quindi due misure indipendenti: per ciascuna gocciolina si fanno quindi parecchie misure, a due diversi valori della tensione applicata.

Tutti i valori misurati per la carica risultano multipli di un valore minimo, ovvero la carica del singolo elettrone.

Per la comprensione del metodo è quindi necessario conoscere le forze che agiscono sulle goccioline di olio e la legge del moto che ne risulta: brevi richiami a questi concetti, tutti di Fisica Classica, sono riportati nel primo capitolo, insieme a qualche cenno sulla quantizzazione, teoria che ricevette una clamorosa conferma sperimentale proprio da questa misura.

*1 i protoni ed i neutroni sono costituiti da quarks a carica  $2/3$  o  $-1/3$  rispetto a quella dell'elettrone, ma i quarks secondo la moderna teoria possono esistere solo "incollati" insieme in modo da costituire particelle di carica  $0$  o  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , e non esistono liberi in natura.*

2) ricordiamo che il Coulomb è l'unità di carica elettrica nel sistema Standard Internazionale, dove le grandezze elettriche sono basate sulla corrente di un Ampère, in cui scorre un Coulomb al secondo.

## 1.1 L'inizio della Fisica Moderna e la scoperta dell'elettrone

All'inizio del 1900 una serie di esperimenti misero in crisi i fondamenti della teoria classica e idee teoriche come quelle della Relatività e della Quantizzazione suggerirono un modo completamente diverso di descrivere la natura e i suoi fenomeni. Il processo non fu semplice e furono necessari molti anni, e molti esperimenti, perché si raggiungesse il consenso dei fisici sulla interpretazione dei fatti sperimentali.

Si parla di quantizzazione quando una grandezza fisica possa essere posseduta e/o trasportata solo in multipli di una quantità fondamentale, definita in generale **quanto**. All'inizio del '900, si scoprì infatti che molte grandezze fisiche avevano natura quantizzata: uno degli esempi più noti è sicuramente quello della energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica, la quale viaggia sempre in pacchetti di energia definita (quanti di luce), comunemente definiti **fotoni**. Negli stessi anni l'esperimento di Millikan dimostrò che anche la carica elettrica si presenta in natura soltanto come multipla di una carica elementare, quella dell'elettrone.

Il nome *elettrone* era stato proposto da G.J. Stoney nel 1891 per indicare l'unità di carica elettrica, ma la paternità della scoperta dell'elettrone è attribuita a Thompson, che nel 1897 all'Università di Cambridge, riuscì a dimostrare che i *raggi catodici*, all'epoca di natura sconosciuta e supposti appunto essere dei *raggi*, sono in realtà costituiti da corpuscoli aventi carica elettrica e massa. Egli misurò il rapporto carica/massa e dimostrò che la massa era circa 1800 volte più piccola di quella di un atomo di idrogeno. Per questo importantissimo lavoro, in pratica la scoperta della prima particella elementare, ricevette il premio Nobel nel 1906. L'esperimento di Thompson tuttavia non era in grado di dimostrare se la carica fosse una quantità discreta, e non continua, cioè sempre multipla di un valore minimo.

Il modello proposto da Thompson postulava la composizione dell'atomo come un numero discreto di elettroni immersi in una sostanza con distribuzione di carica positiva continua, di valore totale uguale alla somma delle cariche degli elettroni. Successivamente Rutherford, con il suo celebre esperimento, dimostrò che questo modello non funziona e ipotizzò il modello atomico in cui gli elettroni ruotano intorno ad un nucleo positivo, di dimensioni molto piccole rispetto ai raggi delle orbite elettroniche.

## 1.2 La carica elettrica e la forza elettrostatica

La carica elettrica è una caratteristica intrinseca di alcune particelle sub-atomiche (elettroni e protoni); a livello macroscopico si manifesta con i fenomeni elettrici e magnetici. I corpi carichi elettricamente possono attirarsi o respingersi, per cui si parla di due tipi di carica, “*positiva*” o “*negativa*”. Il segno, positivo o negativo, della carica è quindi puramente convenzionale; la convenzione fu decisa molto tempo prima della scoperta dell’elettrone, e la carica dell’elettrone risulta *negativa*. Sappiamo oggi che gli atomi sono elettricamente neutri, avendo un ugual numero di elettroni e di protoni, e la presenza di carica è determinata dalla perdita di uno o più elettroni (carica positiva) o dall’acquisizione di uno o più elettroni (carica negativa).

La presenza di carica elettrica su un corpo determina al suo intorno l'instaurarsi di un campo di forza elettrostatica, ovvero una modificazione dello stato dello spazio, per cui una seconda carica, presente nel campo, risente dello stesso subendo l'azione di una forza . La forza che una carica  $q$  subisce in un campo elettrostatico  $E$  è data dal prodotto  $qE$ , ed è diretta nella stessa direzione del campo se  $q$  è positiva, in direzione opposta se  $q$  è negativa. Questa è la forza che permette, nel caso dell'esperimento di Millikan, di controbilanciare parzialmente o totalmente la forza di gravitazione o addirittura di superarla, facendo salire la goccia di olio verso l’alto.

Ricordiamo che è possibile ottenere un campo elettrico uniforme applicando una differenza di potenziale  $\Delta V$  tra le due armature di un condensatore piano; il campo è diretto dall’armatura a potenziale maggiore verso quella a potenziale minore e, se  $d$  è la distanza tra le armature si ha:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

e quindi la forza su una carica  $q$  è:

$$F = qE = q \frac{\Delta V}{d} \quad (1.1)$$

Le cariche positive vengono attratte dall’armatura a potenziale minore, quelle negative dall’armatura a potenziale maggiore; se le piastre del condensatore sono orizzontali il campo  $E$ , e quindi la forza  $F$ , sono diretti lungo la verticale, paralleli alla forza di gravità.

### 1.3 Caduta di un grave in un fluido

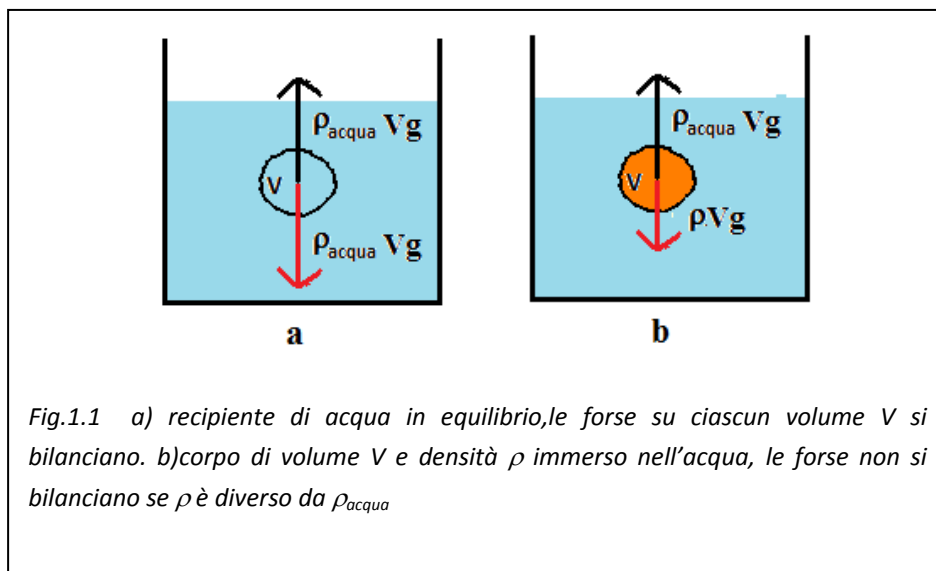
La forza di gravità agisce su tutti i corpi dotati di massa; sulla terra, e al livello del mare, la sua azione è quantificabile tramite la accelerazione di gravità  $g$ , che è uguale a circa  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Per una massa  $m$  la forza, detta comunemente *forza peso*, è data da:  $F_g = m g$ . Se il corpo di massa  $m$  ha una forma sferica, ed è nota la sua densità  $\rho$  ( $\rho = m/V$ ) e il raggio  $R$ , ricordando che il volume della sfera è dato da:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

si ha:

$$F_g = \frac{4}{3} \pi \rho g R^3 \quad (1.2)$$

Un corpo immerso in un fluido (liquido o gas) subisce una spinta verso l'alto (comunemente chiamata *forza o spinta* di Archimede) che dipende dal suo volume e dalla densità del fluido: consideriamo per esempio un recipiente pieno di acqua: in assenza di sollecitazioni esterne l'acqua è in quiete, quindi soggetta a forza totale zero: ogni volumetto  $V$  di acqua ha una forza peso  $\rho_{\text{acqua}} V g$  rivolta verso il basso, che quindi, essendo il volumetto in quiete, è bilanciata da una forza uguale e contraria (diretta verso l'alto) esercitata dal resto dell'acqua come in fig 1.1a



Se si inserisce nell'acqua un corpo di volume  $V$  e densità  $\rho$ , alla forza di gravità  $\rho V g$  si oppone la forza esercitata dal resto dell'acqua, come mostrato in Fig. 1.1b è:

$$F_A = \rho_{\text{acqua}} V g \quad (1.3)$$

La forza complessiva che agisce sul corpo è quindi la somma delle due forze:

$$F_{\text{tot}} = \rho V g - \rho_{\text{fluido}} V g = (\rho - \rho_{\text{fluido}}) V g$$

ed è diretta verso l'alto se  $\rho < \rho_{\text{fluido}}$ , verso il basso in caso opposto ( $\rho > \rho_{\text{fluido}}$ ).

Nel caso di una goccia sferica di raggio  $r$  di olio immersa in aria, la forza complessiva si scrive quindi:

$$F = \frac{4}{3} \pi (\rho_{\text{olio}} - \rho_{\text{aria}}) g r^3 \quad (1.4)$$



## 1.4 La forza di attrito viscoso

Un corpo in moto all'interno di un fluido è anche soggetto ad una forza dovuta all'attrito con le molecole del fluido che costantemente tende a frenarlo. In generale è assai difficile quantificare questo tipo di forza, detta *di attrito viscoso*, ma per velocità basse si osserva che la forza è proporzionale alla velocità del corpo in moto, la costante di proporzionalità è denominata *coefficiente di frizione*  $\xi$  (csi) :

$$F_{visc} = \xi v \quad (1.5)$$

L'equazione del moto di un grave di massa  $m$  che cade in un mezzo viscoso, per esempio partendo da fermo, si scrive eguagliando la somma di tutte le forze (1.4 e 1.5) agenti sul grave al prodotto della massa per l'accelerazione ( $m \mathbf{a}$ ). Ricordando, per chi è familiare con gli elementi del calcolo differenziale, che l'accelerazione  $\mathbf{a}$  è uguale alla derivata della velocità rispetto al tempo, scriveremo quindi:

$$F - \xi v = m \frac{dv}{dt} \quad (1.6)$$

La soluzione di questa equazione differenziale è un moto in cui la velocità inizialmente aumenta, ma poi si stabilizza ad un valore, che viene detto *limite* o *di regime* e resta costante. Dopo una fase iniziale il moto è quindi uniforme; la velocità limite o di regime è data da  $F/\xi$  e il tempo necessario perché il moto diventi uniforme è dato da circa  $4 m/\xi$  secondi. Quando questo ultimo valore è piccolo rispetto al tempo della misura, siamo in presenza di un moto rettilineo uniforme, con velocità che si ottiene dal rapporto  $F/\xi$ .

Il coefficiente di frizione è diverso da situazione a situazione, e dipende dalla natura dei materiali, dalla loro forma, ecc; nel caso di corpi a forma sferica si utilizza la legge di Stokes :

$$\xi = 6\pi\eta r \quad (1.7)$$

Qui compare la viscosità  $\eta$  (eta) del fluido, ed anche il raggio della gocciolina. La viscosità è una grandezza, propria dei fluidi, che caratterizza la resistenza del fluido a sforzi di taglio, ovvero la resistenza delle sue particelle a muoversi un piano sopra l'altro. Risulta peraltro intuitivo che la forza di attrito viscoso cresce con la viscosità e con le dimensioni del corpo.

## 2.1 Il dispositivo sperimentale

L'apparato originale di Robert Millikan includeva una coppia di piatti metallici orizzontali tra i quali veniva applicata una differenza di potenziale elettrico di alcune migliaia di Volt. In questo modo si creava nella regione compresa tra i piatti un campo elettrico uniforme (come nel condensatore piano). I piatti erano tenuti a distanza fissa da una cornice di materiale isolante in cui erano praticati 4 fori, tre usati per l'illuminazione mediante una potente lampada, mentre il quarto serviva per poter osservare l'interno attraverso un microscopio. Lo schema semplificato dell'apparato è riportato nella figura 2.1. Dell'olio viene nebulizzato in una cella al di sopra del condensatore e da lì cade per gravità nella regione dove è presente il campo elettrico. L'olio era scelto in base alla pressione di vapore che doveva risultare particolarmente bassa. Ricordiamo cosa è la pressione di vapore: i liquidi tendono ad evaporare, passando alla forma gassosa e i gas a condensare passando allo stato liquido; per ogni sostanza, e per una data temperatura, c'è un valore della pressione, detto *pressione di vapore*, in cui il gas della sostanza è in equilibrio dinamico con il suo liquido: un egual numero di molecole passa dalla fase liquida a quella gassosa e dalla gassosa alla liquida.

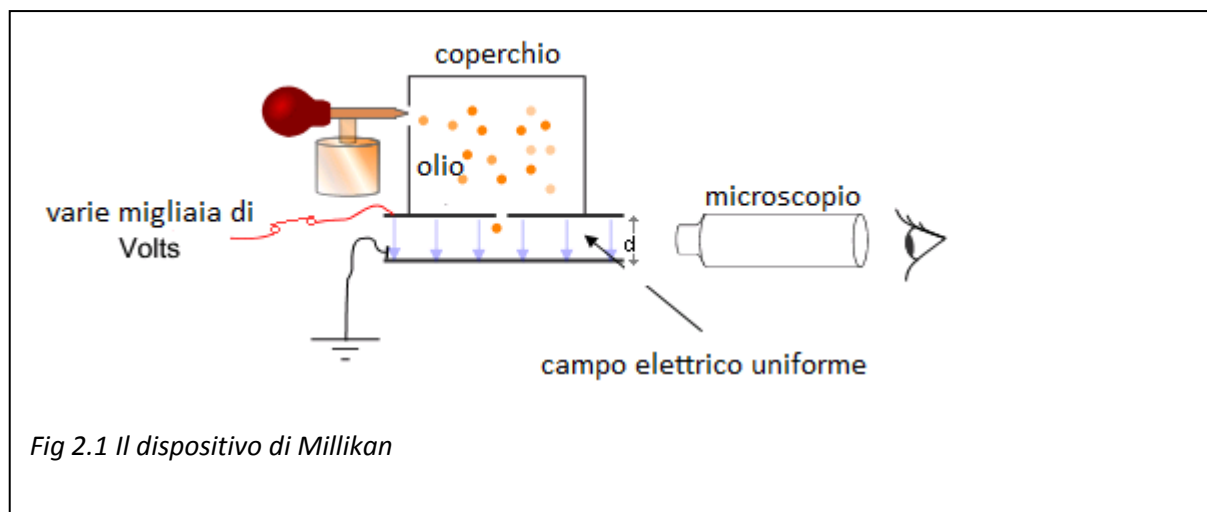


Fig 2.1 Il dispositivo di Millikan

L'olio utilizzato, grazie alla bassa pressione di vapore ha il vantaggio di produrre goccioline dalla massa praticamente stabile, e vedremo che questo è un requisito essenziale per la misura. Durante il procedimento di nebulizzazione alcune delle goccioline d'olio si elettrizzano per strofinio contro il collo della pompetta e quindi diventano elettricamente cariche; maggiore

elettrizzazione si potrebbe ottenere usando una sorgente di radiazione ionizzante, come un tubo a raggi X.

Le goccioline cariche entrate nel campo elettrico, attraverso un piccolo foro praticato nel piatto del condensatore, sono soggette alla forza elettrostatica in aggiunta a quella di gravità, alla spinta di Archimede e alla forza di attrito viscoso, e possono risalire o scendere a seconda della differenza di potenziale applicata tra i piatti, come discusso in seguito. Se le goccioline sono illuminate lateralmente, esse appaiono come piccoli punti brillanti contro un fondo scuro.

Con l'osservazione visiva tramite il microscopio, e l'uso di un cronometro, viene misurata la velocità delle goccioline; questa dipende da molti parametri fra cui: il campo elettrico applicato (noto perché regolabile dall'esterno), la densità dell'olio e dell'aria (che possono essere misurate indipendentemente), la viscosità dell'aria (anch'essa misurabile indipendentemente) e le dimensioni delle singole goccioline che possono essere ricavate, per esempio, da una prima misura di velocità, in assenza di campo elettrico. Le goccioline sono infatti di varia misura e quindi il raggio è una incognita da determinare, oltre alla carica, di conseguenza le misure indipendenti necessarie sono due. La carica trasportata da ciascuna goccia d'olio può essere ricavata dalla misura della velocità di regime in presenza di campo elettrico, come discusso in dettaglio nel seguito.

L'esperimento richiede che una stessa goccia venga misurata in varie condizioni, quindi il dispositivo includeva un tappo che si chiudeva una volta che una goccia elettricamente carica fosse osservata. Il campo elettrico applicato alle armature del condensatore era tale che la piastra superiore fosse a potenziale maggiore, così che le gocce d'olio, che si elettrizzano negativamente catturando elettroni, siano attratte dalla forza elettrica verso l'alto.

## 2.2 Condizione di equilibrio della goccia

In caso di equilibrio la gocciolina d'olio carica rimane ferma nel volume di osservazione. Si tratta del caso più facile da trattare analiticamente, perchè la forza di attrito viscoso (che è proporzionale alla velocità) è assente.

Sulla goccia agiscono sempre le restanti tre forze: la forza di gravitazione verso il basso, la forza di Archimede verso l'alto e quella elettrostatica verso l'alto (supponendo che la differenza di potenziale è tale che la gocciolina è attratta elettricamente dalla piastra superiore )

Detta  $\rho_{olio}$  la densità dell'olio,  $r$  il raggio della goccia, la forza di gravità, dalla eq. 1.2 risulta:

$$F_g = -\frac{4}{3}\pi \rho_{olio} g r^3$$

Dove il segno *meno* indica che la forza è diretta verso il basso; la spinta di Archimede è data dalla 1.3:

$$F_A = \frac{4}{3}\pi \rho_{aria} g r^3$$

La forza elettrica, data dalla 1.1 è :

$$F_E = q \frac{V_{eq}}{d}$$

E quindi la condizione di equilibrio:  $F_g + F_A + F_E = 0$

Cioè:

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3}\pi g r^3 (\rho_{olio} - \rho_{aria}) \quad (2.1)$$

Concettualmente questo è il metodo più semplice, e richiede di variare  $V$  fino ad ottenere che la gocciolina si fermi ( e quindi determinare  $V_{eq}$ ); spesso si preferisce misurare la velocità delle goccioline, che è dell'ordine di  $10^{-4}$  m/s, come spiegato nei paragrafi seguenti.

## 2.3 Determinazione del raggio delle goccioline in assenza di campo elettrico

In assenza di campo elettrico le goccioline cadono sotto la forza della gravità, in parte compensata dalla spinta di Archimede e dall'attrito viscoso; utilizzando le espressioni 1.4, 1.5, 1.7, l'equazione del moto 1.6 si scrive:

$$F_{tot} = \frac{4}{3} \pi (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g r^3 - 6\pi\eta r v = ma \quad 2.2$$

Come già accennato, la soluzione di questa equazione dà un moto inizialmente accelerato che dopo un certo tempo diventa uniforme, con velocità (detta di regime) che resta poi costante; questa velocità si ottiene annullando la somma delle forze  $F_{tot}$ :

$$v_{reg}^0 = \frac{2 (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g}{9 \eta} r^2$$

Il tempo necessario per lo stabilirsi della situazione di regime è dato dal rapporto  $m/\xi$  che nel nostro caso è dell'ordine del centesimo di microsecondo, quindi del tutto trascurabile. Possiamo quindi considerare il moto uniforme e la misura della velocità permette di determinare il raggio  $r$  della goccia:

$$r^2 = \frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0 \quad 2.3$$

Il risultato ottenuto si applica a tutte le goccioline anche quelle che non sono elettricamente cariche; nell'esperimento bisogna prima scegliere una gocciolina carica, per esempio vedendo che si possa far fermare o far risalire applicando il campo elettrico, e poi misurare  $v_{reg}^0$ .

## 2.4 Goccia in risalita per effetto del campo elettrico

Se la forza elettrostatica è abbastanza grande da rendere la somma delle forze agenti sulla goccia diretta verso l'alto, la gocciolina d'olio risale. La velocità della goccia è bassa ma non nulla, quindi si deve aggiungere, nella espressione delle forze, anche quella di attrito viscoso. In particolare, abbiamo due forze dirette verso il basso: forza gravitazionale e forza di attrito viscoso (ricordiamo che la forza di attrito è sempre diretta in direzione opposta a quella del moto) e due verso l'alto (forza di Archimede e forza elettrostatica). L'equazione da impostare è quindi

$$F_{tot} = \frac{4}{3} \pi \rho_{aria} g r^3 + q \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi \rho_{olio} g r^3 - 6\pi\eta r v = ma \quad 2.4$$

Dove abbiamo aggiunto alla 2.1 la forza esercitata dal campo elettrico e indicato come positiva la direzione in alto (moto in ascesa). La soluzione è analoga a quella della 2.1 e la velocità di regime, si ottiene annullando la somma delle forze:

$$q \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g r^3 = 6\pi\eta r v_{reg} \quad 2.5$$

Notiamo ancora che si hanno due incognite, poiché le goccioline hanno diverso raggio e diversa carica ed è quindi necessario effettuare due misure indipendenti sulla stessa gocciolina; oltre a  $v_{reg}$  si deve misurare o la differenza di potenziale  $V_{eq}$  per cui la goccia risulta ferma nell'aria (eq. 2.1). oppure la velocità  $v_{reg}^0$  che si ottiene in assenza di campo elettrico (eq. 2,3).

### 3.1 La strumentazione

Il dispositivo sperimentale utilizzato nell'esperienza di laboratorio (mostrato in Fig. 3.1) è composto da una ampolla contenente olio di silicone, nella quale è contenuto un nebulizzatore in vetro. Utilizzando una pompetta si possono nebulizzare all'interno dell'ampolla delle goccioline di olio microscopiche, di forma sferica e di raggio dell'ordine di un  $1\mu\text{m}$  ( $10^{-6}\text{m}$ ). Le goccioline si muovono di moto casuale, in seguito agli urti continui con le molecole dell'aria (moto *browniano*) ed alcune di esse sfuggono superiormente dall'ampolla, muovendosi in seguito verso il basso per effetto della forza di gravità.



Fig. 3.1 Visione d'insieme del dispositivo usato.

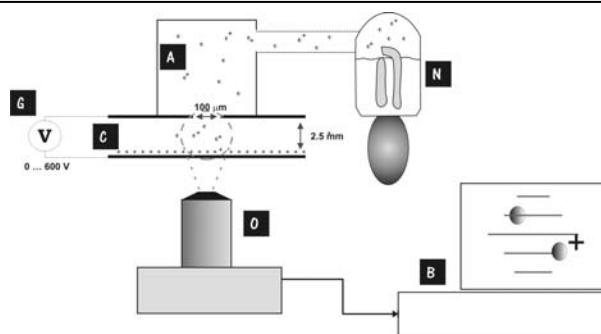


Fig. 3.2 Schema del dispositivo usato:  
N:nebulizzatore, A: cilindro superiore, V: generatore  
O:oculare collegato con una webcam, B:PC sul cui  
schermo compare l'immagine

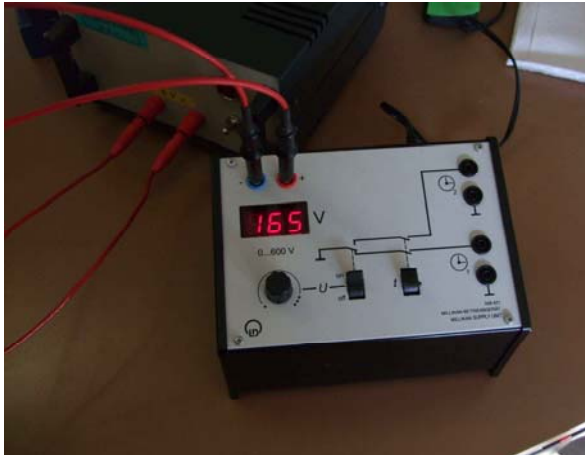
Cadendo, alcune entrano, attraverso una piccola apertura, in una zona cilindrica verticale sulla quale è puntato l'obiettivo di l'osservazione. La zona di osservazione è anche illuminata in modo che le gocce appaiano come dei puntini luminosi attraverso l'obiettivo.

La regione ingrandita è dell'ordine di un millimetro cubo e sull'obiettivo è presente una scala graduata che corrisponde, nel totale delle sue 30 divisioni, ad una distanza di 0.90 mm.

Osservando il moto delle goccioline d'olio attraverso la scala, è possibile quindi misurare lo spostamento delle gocce e, misurando il tempo necessario con un cronometro, trovare la loro velocità, che sarà dell'ordine di  $10^{-4}\text{m/s}$ .

All'interno della regione di osservazione è possibile creare un campo di forza elettrica diretto verticalmente, tra due armature metalliche orizzontali e distanti tra loro 2.5 mm. La differenza di potenziale elettrico (tensione) tra queste due armature determina l'intensità del campo elettrico e dunque la forza che agisce sulle gocce cariche. Questa differenza di potenziale, viene prodotta da un generatore di alta tensione, ed è misurata costantemente da un voltmetro digitale integrato nello stesso (Fig. 3.3).

Altri dettagli del dispositivo, come la presenza di una telecamera o webcam, e di un generatore di tensione di pilotaggio, sono utili per la esecuzione della esperienza anche se concettualmente non essenziali. La webcam è collegata con un computer e quindi rende possibile a più osservatori la visione delle goccioline (Fig. 3.4).



*Fig. 3.3 Generatore di tensione con cui si regola la d.d.p. tra i piatti della camera nell'intervallo 0-600 Volt*



*Fig. 3.4 Esempio di come si vede sul computer l'immagine di una gocciolina e della scala graduata.*



### 3.2 Come si esegue l'esperimento

Mentre Millikan osservava le goccioline attraverso un microscopio, nel nostro laboratorio abbiamo collegato una webcam al microscopio in modo da osservare comodamente le goccioline, e la scala graduata, sullo schermo di un computer. La fotografia dell'apparato è mostrata in Fig. 3.1, lo schema di principio in Fig. 3.2 .

L'osservazione del moto delle gocce può avvenire in diverse condizioni, e per ciascuna di esse è possibile scrivere l'equazione delle forze in gioco. In tutti i casi, dopo un tempo molto breve di accelerazione, la forza di attrito viscoso diventa sufficientemente intensa da fare equilibrio alle altre, e quindi la velocità del corpo (*velocità limite*), rimane costante poichè la risultante delle forze è nulla. Come abbiamo notato in precedenza il rapporto  $m/\xi$  delle goccioline è tanto piccolo che il moto è praticamente tutto uniforme, e quindi la velocità misurata è sempre quella limite.

Per ogni goccia bisognerà effettuare diverse misure, in ciascuna di almeno due situazioni diverse, tra le 4 possibili:

- a) Goccia in equilibrio (velocità zero, differenza di potenziale  $V_{eq}$ )
- b) Campo elettrico nullo , goccia in discesa per gravità ( $V=0$  , velocità misurata  $v_{reg}^0$ )
- c) Goccia in risalita (d.d.p.  $V$ , velocità misurata  $v_{reg}$  )
- d) Goccia in discesa con campo elettrico (d.d.p.  $V^*$ , velocità misurata  $v_{reg}^*$ )

Le incognite sono il raggio  $r$  delle goccioline e la loro carica  $q$ ; la differenza di potenziale tra le armature viene letta con il voltmetro; la distanza percorsa viene letta sulla scala graduata, il tempo impiegato viene misurato con un cronometro. Gli altri dati noti sono:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| • distanza tra i piatti:             | $d=2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$                       |
| • accelerazione di gravità           | $g=9.81 \text{ m/s}^2$                                 |
| • densità dell'olio di silicone:     | $\rho_{olio}=1.075 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$         |
| • densità dell'aria (a $20^\circ$ ): | $\rho_{aria}=1.292 \text{ kg/m}^3$                     |
| • viscosità dell'aria:               | $\eta=1.82 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ |

Misurando molte volte la stessa gocciolina, il valore medio ottenuto ha una migliore precisione delle singole misure; misurando molte goccioline, il valore della carica dell'elettrone dovrebbe

coincidere con il valore più basso misurato, e tutti gli altri valori dovrebbero essere multipli interi.

Se il valore più piccolo trovato non è quello che ci si aspetta per la carica dell'elettrone, vuol dire che ciascuna gocciolina misurata ha carica più grande; tuttavia considerando le cariche delle varie gocce si dovrebbe trovare che il rapporto tra ciascuna coppia di cariche coincide con il rapporto di due numeri interi piccoli (numero di elettroni acquisiti con l'elettrizzazione):

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{n_1 e}{n_2 e} = \frac{n_1}{n_2}$$

e di conseguenza derivare il valore della carica dell'elettrone.

### 3.3 Calcolo del valore della carica q

#### 3.3.1 Misure a) e b)

Dapprima variamo il valore della differenza di potenziale applicata fino a che, per il valore  $V_{eq}$ , si osserva che la goccia è ferma: abbiamo allora la relazione 2.1 tra q ed r:

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3} \pi g r^3 (\rho_{olio} - \rho_{aria})$$

Successivamente spegniamo l'alimentatore e la goccia scenderà sotto l'effetto della forza di gravità, frenata dalla spinta di Archimede e dalla forza di viscosità dell'aria; misureremo la velocità data dalla eq. 2.3:

$$r^2 = \frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0$$

Possiamo quindi determinare la carica q, sostituendo nell'espressione precedente questo valore di r:

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3} \pi g (\rho_{olio} - \rho_{aria}) \left( \frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{18\pi d}{V_{eq}} \eta v_{reg}^9 \sqrt{\frac{\eta v_{reg}^9}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})}}$$

### 3.3.2 Misure a) e c)

Come nel caso precedente, variamo il valore della differenza di potenziale applicata fino a che, per il valore  $V_{eq}$ , si osserva che la goccia è ferma: abbiamo allora la relazione 2.1 tra  $q$  ed  $r$ :

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3} \pi g r^3 (\rho_{olio} - \rho_{aria})$$

Dopo aver determinato  $V_{eq}$  aumentiamo il potenziale applicato: la gocciolina comincerà a muoversi verso l'alto; ottenuta una velocità facilmente misurabile con la nostra scala, fermiamo il valore di  $V$  e misuriamo la velocità  $v_{reg}$ ; avremo la relazione tra  $q$  ed  $r$  data dalla 2.5

$$q \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g r^3 = 6\pi\eta r v_{reg}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$q \frac{V - V_{eq}}{d} = 6\pi\eta r v_{reg}$$

da cui ricaviamo  $r$ :

$$r = q \frac{V - V_{eq}}{6\pi d \eta v_{reg}}$$

e sostituendo:

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3} \pi g (\rho_{olio} - \rho_{aria}) \left( q \frac{V - V_{eq}}{6\pi d \eta v_{reg}} \right)^3$$

Semplificando  $q$  da entrambi i membri:

$$q^2 = \frac{3V_{eq}}{4d\pi g (\rho_{olio} - \rho_{aria})} \frac{216\pi^3 d^3 \eta^3 v_{reg}^3}{(V - V_{eq})^3}$$

da cui:

$$q = 9\pi d \sqrt{\frac{2V_{eq}}{g (\rho_{olio} - \rho_{aria})} \frac{\eta^3 v_{reg}^3}{(V - V_{eq})^3}}$$

e risostituendo nell'espressione di  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{9V_{eq}}{2g (\rho_{olio} - \rho_{aria})} \frac{\eta v_{reg}}{(V - V_{eq})}}$$

### 3.3.3 Misure b) e c)

Questo metodo comporta la misura di due velocità, ottenute rispettivamente accendendo e spegnendo il campo elettrico; in questo caso il sistema di due equazioni in due incognite, come discusso in precedenza è dato dalle eq. 2.3 (campo elettrico spento) e 2.5 (campo elettrico acceso):

$$r^2 = \frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0$$

$$q \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g r^3 = 6\pi\eta r v_{reg}$$

Possiamo quindi scrivere, scomponendo  $r^3$  in  $r^2 r$ , sostituendo ad  $r^2$  la prima espressione:

$$q \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi (\rho_{olio} - \rho_{aria}) g \frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0 r = 6\pi\eta r v_{reg}$$

e dopo aver semplificato:

$$q \frac{V}{d} - 6\pi\eta v_{reg}^0 r = 6\pi\eta r v_{reg}$$

Quindi:

$$q = \frac{6\pi d\eta}{V} (v_{reg} + v_{reg}^0) r$$

E sostituendo ancora ad  $r$  il valore trovato all'inizio:

$$q = \frac{6\pi\eta d (v_{reg}^0 + v_{reg})}{V} \sqrt{\frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})} v_{reg}^0} \quad \text{ovvero:}$$

$$q = \frac{18\pi\eta^{\frac{3}{2}} d (v_{reg}^0 + v_{reg})}{V} \sqrt{\frac{v_{reg}^0}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})}}$$

### 3.4 Calcolo delle incertezze

Effettuata una misura è molto importante determinare l'errore, ovvero l'incertezza, da cui è affetto il risultato ottenuto; gli errori possono essere dovuti a molte cause e rientrano essenzialmente in due categorie: errori statistici ed errori sistematici.

Gli errori statistici sono dovuti al fatto che se si fanno  $N$  misure della stessa quantità si ottengono in generale risultati diversi. Questo in genere avviene per fenomeni aleatori derivati da errori di lettura degli strumenti o fluttuazioni indotte da fenomeni esterni, come disturbi, variazioni di temperatura ecc. Una serie ripetuta di misurazioni comporta la progressiva riduzione dell'errore casuale, poiché i singoli scostamenti si annullano reciprocamente e l'errore sulla media diminuisce con la radice quadrata di  $N$ .

Gli errori sistematici sono quelli dovuti al metodo usato, alla precisione degli strumenti utilizzati, alla non perfetta conoscenza delle quantità che si utilizzano come note, ecc. È detto sistematico perché è costante al ripetersi della misura, e per questo non può essere eliminato con la ripetizione della misurazione.

Quando si misura una quantità che è funzione di più variabili l'errore complessivo dipende dai singoli errori; se questi sono molto diversi si possono trascurare quelli che sono di ordine di grandezza più piccolo.

Il risultato di una misura viene di solito fornito come  $x \pm \delta x$ , e  $\delta x$  è l'errore *assoluto* su  $x$ ; la qualità della misura dipende dall'errore *relativo*,  $\delta x/x$ : se per esempio si fa una misura di lunghezza con una incertezza di 1 cm, nel caso si voglia misurare un oggetto lungo 20 cm l'errore relativo è 5%, nel caso di un oggetto lungo 5m l'errore relativo è ben più piccolo, 0.2% e quindi la misura molto migliore.

Se si misura la quantità  $C = A+B$  l'errore massimo di  $C$  è la somma degli errori di  $A$  e di  $B$ :  $\delta C = \delta A + \delta B$ ; se si misura la differenza  $D = A-B$  l'errore massimo è lo stesso, in quanto gli errori si sommano, non si sottraggono, e quindi vanno sommati i valori assoluti. Se ci sono molte variabili, si possono trascurare gli errori su quelle che hanno un errore relativo molto più piccolo (almeno un fattore 10) degli altri.

Nel caso di questa esperienza si può assumere di poter trascurare le incertezze sui valori dei dati numerici dati nel paragrafo 3.2 (la viscosità, le densità ecc...), tranne quella sulla distanza  $d$

tra le armature del condensatore, che si può stimare in  $\pm 0.05\text{mm}$  (errore relativo  $5/250$ , ovvero del 2%).

Le quantità misurate sono differenza di potenziale e velocità e l'errore dipende dagli strumenti di lettura usati. L'incertezza sulle misure di tensione, essendo queste effettuate con un voltmetro digitale, dovrebbe essere in teoria fissata ad una cifra sull'ultima significativa; in realtà si può notare che, durante la misura, la tensione letta varia di qualche Volt, quindi è più realistico fissare l'incertezza ad (almeno)  $\pm 2\text{Volt}$ . Poiché il valore di  $V$  applicato è dell'ordine delle centinaia di Volt, anche l'errore è dell'ordine del %.

Per quanto riguarda le misure di velocità, si potrebbe stimare l'incertezza sulle misure di spazio percorso dalla goccia a mezza divisione della scala graduata ( $\pm 0.02\text{mm}$ ) e quella di tempo, anche se fatta un cronometro digitale, ad almeno  $\pm 0.05\text{s}$ . Anche gli errori relativi su queste quantità sono dell'ordine del % e quindi è lecito trascurare tutti gli errori dell'ordine del % o inferiori.

Il calcolo degli errori richiede nozioni di calcolo differenziale; per semplicità diamo alcuni esempi dei risultati che si ottengono. L'errore  $\delta f$  sulla quantità  $F(x)$ , funzione della variabile  $x$  che misuriamo con l'incertezza  $\delta x$ , dipende dal tipo di funzione (per chi conosce il calcolo differenziale, bisogna fare la derivata  $df/dx$ ). Per esempio, si ha, indicando con "a" una costante, ovvero una quantità non affetta da incertezza:

Funzione	errore assoluto	errore relativo
• $F = ax$	$\delta F = a \delta x$	$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta x}{x}$
• $F = \frac{a}{x}$	$\delta F = \frac{a}{x^2} \delta x$	$\frac{\delta F}{F} = \frac{\delta x}{x}$
• $F = ax^2$	$\delta F = 2a \delta x$	$\frac{\delta F}{F} = 2 \frac{\delta x}{x}$
• $F = ax^n$	$\delta F = n a x^{n-1} \delta x$	$\frac{\delta F}{F} = n \frac{\delta x}{x}$

Se  $F$  una funzione di più variabili, tra loro **indipendenti**, ciascuna misurata col suo errore, l'errore massimo totale è dato dalla somma dei  $dF$  calcolati per ciascuna variabile; una stima migliore dell'errore totale è dato dalla *deviazione standard*,  $\sigma$  che si ottiene facendo la radice della somma dei quadrati dei singoli errori.

Calcoliamo, a titolo di esempio, l'errore sulla misura del raggio della gocciolina, dato da

$$r = \sqrt{\frac{9\eta}{2g(\rho_{olio} - \rho_{aria})}} v_{reg}^0$$

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{1}{2} \frac{\delta v}{v}$$

La velocità  $v$  è funzione di due variabili indipendenti,  $s$  e  $t$ , quindi da  $v=s/t$  ricaviamo:

$\delta v = v \left( \frac{\delta s}{s} + \frac{\delta t}{t} \right)$  (errore massimo, che corrisponde al caso in cui la misura sia di  $s$  che di  $t$  si discosti dal valore vero per l'errore strumentale che abbiamo valutato)

Sostituendo nella espressione di  $\delta r$  abbiamo per l'errore massimo:

$$\delta r = \frac{r}{2} \left( \frac{\delta s}{s} + \frac{\delta t}{t} \right)$$

L'errore totale si trova applicando lo stesso ragionamento alla espressione di  $q$ ; se per esempio utilizziamo il metodo a) + b) :

$$q = \frac{d}{V_{eq}} \frac{4}{3} \pi g r^3 (\rho_{olio} - \rho_{aria})$$

considerando che le grandezze con incertezza sono  $d$ ,  $V$ ,  $r$  e tenuto conto del calcolo dell'errore su  $r$ , abbiamo per l'errore massimo:

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta V_{eq}}{V_{eq}} + 3 \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta V_{eq}}{V_{eq}} + \frac{3}{2} \frac{\delta s}{s} + \frac{3}{2} \frac{\delta t}{t}$$