Riforma degli assiomi della Fisica

Per la costruzione di una nuova teoria fisica si considerano tre gruppi di assiomi:
Assiomi generali
Assiomi meccanici
Assiomi elettromagnetici

Un avvenimento di qualsiasi tipo risulta determinato se é localizzato nello spazio e nel tempo, ma la localizzazione in se stessa é un fatto accidentale, mentre levento é lente primitivo fondamentale.

Postulati

1) Esistono infiniti (un numero arbitrariamente grande) eventi e la loro totalitá costituisce luniverso (ció non implica lillimitatezza delluniverso su cui non si fanno ipotesi).

2) Esiste uno spazio tridimensionale S che gode di quattro proprietá essenziali:

a) Le figure geometriche di tale spazio obbediscono alla geometria euclidea (esistono quindi una o piú terne cartesiane).

b) In S ha senso parlare di tempo avente carattere comune in tutti i suoi punti, resta cosí definita la nozione di contemporaneitá fra fenomeni avvengono in luoghi diversi. Questa nozione é assunta vera solo allinterno di ogni S, mentre nella fisica galileiana la nozione di contemporaneitá é universale.

c) Posto in S un riferimento cartesiano e munito S di un tempo t, tutti i punti (eventi) delluniverso sono individuati da una quaterna di coordinate (x,y,z,t) biunivocamente determinate. Infine, luniverso deve essere omogeneo rispetto ad ogni fenomeno fisico. Principio di relativitá estesa. Esistono infiniti spazi tridimensionali con le caratteristiche di S, tutti mobili fra di loro. Quindi in ogni S resta definito un tempo t uguale in tutto S, ma, non necessariamente, uguale a $t \in S' \neq S$. Si ha:

a') Ciascun S gode delle propriet stabilite in 2).

b') Ciascun S si muove di moto traslatorio uniforme rispetto agli altri, ossia $\mathcal{R} \in S$ si muove rispetto ad $\mathcal{R}' \in S'$.

c') Tutte le leggi della fisica hanno la stessa formulazione in ogni riferimento.

d) Ogni relazione cinematica in cui intervengono $\mathcal{R} \in$ ed $\mathcal{R}$ dipende con regolaritá dai parametri di $\mathcal{R}$ rispetto ad $\mathcal{R}$ e viceversa. Ogni funzione di un punto che sia differenziabile in $\mathcal{R}$ é tale anche in $\mathcal{R}$.

I postulati sin qui introdotti sono identici a quelli classici, salvo quanto stabilito riguardo alla definizione di contemporaneitá.

Poiché un evento E ha coordinate ben definite in uno qualsiasi degli infiniti riferimenti, segue che esso é da considerare come un elemento *intrinseco*. Se x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate in $\mathcal{R}$ e x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 quelle in $\mathcal{R}'$, vista d'), si deve avere:

$$x_i = f_i(x'_i)$$

Le funzioni f_i devono essere almeno di classe $\mathcal{C}^1$. Dalla omogeneitá dello spazio, facendo l'ipotesi di osservare lo stesso evento che avviene in due punti diversi tanto di S che di S', segue che le f_i devono essere relazioni lineari:

$$x' = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t + A_{10}$$
$$y' = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t + A_{20}$$
$$z' = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + A_{34}t + A_{30}$$
$$t' = A_{41}x + A_{42}y + A_{43}z + A_{44}t + A_{40}$$

Una voltaq scelti S ed S', i paramentri A_{ik} dipendono solo dalla velocitá relativa $\mathbf{v}$ fra i due spazi. Per semplicitá i riferimenti in S ed S' possono scegliersi in modo che $x \equiv x'$, $y \parallel y'$, $z \parallel z'$ e $\mathbf{v}$ parallelo a $x \equiv x'$. Un osservatore di S' vede la terna (x, y, z) di S muoversi ed occupare diverse posizioni in S'. Durante il moto di S in S' si conserva l'ortogonalitá degli assi del suo riferimento dal punto di vista dell'osservatore di S', e ció in virtú dell'omogeneitá di quest'ultimo.

Sia a $t' = 0$ $O \equiv O'$. Allora per $t' = 0$ si ha:

$$\begin{cases} O \equiv & (0,0,0,0) \\ O' \equiv & (0,0,0,0) \end{cases}$$

Da questo risultato segue che $A_{i0} = 0 \forall i$. Ogni evento del piano (x, z) $(y = 0)$ e per ogni t deve avvenire sul piano (x', z') $(y' = 0)$, deve quindi essere:

$$0 = A_{21}x + A_{23}z + A_{24}t$$

Per il principio di identitá dei polinomi deve essere:

$$A_{21} = 0 \ A_{23} = 0 \ A_{24} = 0$$

Analogamente per il piano $z = 0$ si ha:

$$A_{31} = 0 \ A_{32} = 0 \ A_{34} = 0$$

Un evento che in S avvenga in $x = 0$ all'istante $t = 0$ deve aver luogo nel piano $x' = 0$ all'istante $t' = 0$. Quindi si ha:

$$\begin{cases} \text{x' =} & A_{12}y + A_{13}z \\ \text{t' =} & A_{42}y + A_{43}z \end{cases}$$

Cioé si ha: $A_{12} = A_{23} = A_{42} = A_{43} = 0$. Ogni punto del piano $x' = 0$ si muove nella direzione di $x \equiv x'$ con velocitá v, allora:

$$\begin{cases} \text{x =} & vt \\ \text{y =} & \text{cost} \\ \text{z =} & \text{cost} \end{cases}$$

Sono le equazioni del moto dal punto di vista di S. Quindi, nelle condizioni scelte, che sono comunque assolutamente generali, si ha

$$\begin{cases} \text{x' =} & A_{11}(x - vt) \\ \text{y' =} & A_{22}y \\ \text{z' =} & A_{33}z \\ \text{t' =} & A_{41}x + A_{44}t \end{cases}$$

Dove tutti i coefficienti A_{ij} sono funzioni della velocitá che é l'unico parametro dell'evento descritto. In questo contesto si studia la legge di composizione delle velocitá. Per semplicitá, ma senza riduzione di generalitá, si consideri un moto parallelo all'asse x. In S si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = & x(t) \\ \mathrm{y} = & \mathrm{cost} \\ \mathrm{z} = & \mathrm{cost} \\ \mathrm{t} = & t \end{cases}$$

In *S'* si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{x'} = & x'(t) \\ \mathrm{y'} = & \mathrm{cost} \\ \mathrm{z'} = & \mathrm{cost} \\ \mathrm{t'} = & t'(t) \end{cases}$$

Se v é la velocitá di *S'* in S, posto:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad u' = \frac{\partial x'}{\partial t'}$$

$$u' = \frac{\partial x'}{\partial t'} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial x'}{\partial t'} / \frac{\partial t'}{\partial t}$$

Essendo:

$$dx' = A_{11}(dx - vdt)$$

$$dt' = A_{41}dx + A_{44}dt$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = A_{11}(u - v) \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = A_{41}uA_{44}$$

$$u' = \frac{A_{11}(u - v)}{A_{41}u + A_{44}}$$

Chiaramente per $v = 0$ si ha $A_{11} = 1, A_{22} = 1, A_{33} = 1, A_{44} = 1, A_{41} = 0$. Per biunivocitá fra S ed *S'*, quando $v \neq 0$, deve essere: $A_{11} > 0, A_{22} > 0, A_{33} > 0$. Si dimostra anche che: $A_{ii}(v) = A_{ii}(-v)$ per ogni i e $A_{41}(v) = -A_{41}(-v)$. Infatti, sia l la lunghezza (in S) di un segmento parallelo all'asse y e lunghezza l' in *S'*, si ha:

$$l = \frac{l'}{A_{22}(v)}$$

Per l'isotropia di S ed *S'* il cambio di v in $-v$ implica che quest'ultima relazione rimanga invariata. Pertanto si ha $A_{22}(v) = A_{22}(-v)$. Analogamente, con la stessa procedura si ha: $A_{11}(v) = A_{11}(-v)$ e $A_{33}(v) = A_{33}(-v)$.
Si abbia un punto con velocitá u' in *S'* lungo x', allora si ha:

$$u' = \frac{A_{11}(v)(u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)}$$

Se si muta u' in $-u'$ e v in $-v$ si ha:

$$-u' = \frac{-A_{11}(-v)(u-v)}{-A_{41}(-v)u + A_{44}(-v)}$$

Da cui, confrontando le due relazioni, si ottiene:

$$u[A_{41}(v) + A_{41}(-v)] = [-A_{44}(v) + A_{44}(-v)]$$

Poichè questa é un'identitá che deve verificarsi per ogni u segue che deve essere:

$$A_{41}(v) = -A_{41}(-v) \quad A_{44}(v) = A_{44}(-v)$$

Teorema Se S' si muove rispetto ad S con velocitá v, se la velocitá di S rispetto ad S' é $\omega = \phi(v)$, allora: $\omega = -v$.
Dimostrazione. La funzione $\omega = \phi(v)$ gode delle seguenti proprietá:
1) La funzione é definita in un intervallo simmetrico rispetto all'origine.
2) La funzione non dipende dalla particolare scelta di S ed S' ma solo dalla velocitá di S' rispetto ad S.
3) La funzione é dispari, infatti invertendo contemporaneamente l'orientamento di x ed x', ω si muta in $-\omega$ e v in $-v$, quindi: $-\omega = \phi(-v)$, cioé $\phi(v) = -\phi(-v)$.
4) La funzione é invertibile in tutto l'intervallo di definizione: $v = \phi^{-1}(\omega)$. Per il rpincipio di relativitá: $\phi^{-1} = \phi$, quindi $v = \phi[\phi(v)]$.
5) La funzione é continua.
6) Per le proprietá 4) e 5) si ha che la funzione é strettamente monotona. Si ha quindi: $\phi(v) = \pm v$. Infatti, se $\phi(v)$ é decrescente segue che: $\phi(-v) > -v \;\; \phi(v) < v \;\; v > -\phi(-v) > -\phi[\phi(-v)] = -(-v) = v$ che é assurdo. Per contro se $\phi(v)$ é crescente si hanno due casi: $\phi(-v) > -v$ o $\phi(-v) < -v$. Nel primo caso $\phi(-v) > -v \;\; \phi(-v) = -\phi(v) > -v$ da cui si ha:

$$v > \phi(v) > \phi[-\phi(-v)] = -\phi[\phi(-v)] = v$$

L'ultima relazione é assurda. Nel secondo caso si ha:

$$\phi(-v) < -v \;\; \phi(-v) = -\phi(v) < -v$$

Da cui si ha:

$$v < \phi(v) < \phi[-\phi(-v)] = -\phi[\phi(-v)] = v$$

Questo risultato é anch'esso assurdo, quindi l'unica possibilitá é che sia:

$$\phi(v) = \pm v$$

Si considerino tre riferimenti S, S', S", sia v la velocitá di S' in S ed u la velocitá di S" in S. Quando t' - 0 sia O = O' = O". Sia u' la velocitá di S" in S', allora:

$$u' = \frac{A_{11}(v)(u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)}$$

Scambiando S con S" allora u' si muta in $\pm u'$:

$$\pm u' = \frac{A_{11}(u)(v-u)}{A_{41}(u)v + A_{44}(u)}$$

Confrontando le due relazioni si ha la seguente relazione:

$$\frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)}u + \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \pm(\frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)}v + \frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)})$$

Assumendo $u = 0$ si ottiene:

$$\frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \pm(\frac{A_{41}(0)}{A_{11}(0)}v + \frac{A_{44}(0)}{A_{11}(0)})$$

Dai risultati precedenti si ha $A_{41}(0) = 0$, $A_{44}(0) = A_{11}(0) = 1$, quindi:

$$\frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)} = \pm 1$$

Si sceglie il segno $+$ per scrivere:

$$u' = \frac{A_{11}(v)(u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)}$$

Ponendo $u = 0$ si fa coincidere S" con S ricavando cosí la velocitá di S in S':

$$u' = -v$$

Piú impoertante é il risultato che segue:

$$\frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)}u + \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)}v + \frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)}$$

Usando la relazione precedente¿

$$\frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)} = 1$$

$$\frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)}u = \frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)}v$$

L'ultima relazione vale per ogni scelta di u e v per cui si ha:

$$\frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)}u = \frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)}v = cost = -\omega^2$$

Quest'ultimo risultato si pu'o sostituire nella trasformazione:

$$t' = A_{41}(v)x + A_{44}(v)t = -\frac{A_{11}(v)}{\omega^2}vx + A_{11}(v)t$$

$$t' = A_{11}(v)\big(-\frac{v}{\omega^2} + t\big)$$

$$u' = \frac{A_{11}(v)(u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{\omega^2}}$$

Dalle trasformazioni e dalla precedente per t' si ha:

$$x' = A_{11}(v)(x - vt)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{A_{11}(v)(1 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

Scambiando S con S' si scambia v con $-v$ ottenendo:

$$x = A_{11}(-v)(x' + vt') = A_{11}(v)(x' + vt')$$

Confrontando l'ultima relazione con la precedente per x si ricava:

$$A_{11}(v) = \frac{1}{A_{11}(v)\big(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\big)}$$

Da cui si ricava:

$$A_{11}(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}$$

Essendo $A_{22} = A_{33} = 1$, si possono scrivere le trasformazioni nella forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}$$

Come si vede queste sono le trasformazioni speciali di Lorentz se si fa coincidere l'invariante ω con la velocitá della luce. In altri termini, le trasformazione fra le piattaforme euclidee (spazi euclidei, quindi omogenei ed isotropi) che si muovono di moto relativo con velocitá v ammettono tra di loro delle trasformazioni solo di tipo Lorentz e la velocitá delle onde elettromagnetiche non ha alcun ruolo salvo come fatto sperimentale. Infatti la velocitá ω é la velocitá invariante in ogni piattaforma.