Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello invernale - 20 febbraio 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcolino i valori in termini di funzioni gamma di Eulero degli integrali

$$\text{ }_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^{2n}\right)^{1/(2n)} dx\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Curiosità. L'immagine rappresenta la testa del robot gigante *Mazinger Z* italianizzato in *Mazinga Z*, protagonista meccanico del *manga* giapponese omonimo concepito e realizzato a partire dal 1972, sia come fumetto che come cartone animato dal *mangaka* e sceneggiatore giapponese Gō Nagai (6 settembre 1945, Wajima, Giappone).

Utilità. Potrebbe essere utile usare la rappresentazione in forma di integrale di Eulero di primo tipo della funzione beta.

Soluzione del primo problema

Sfruttando la parità della funzione integranda e la simmetria rispetto all'origine dell'intervallo d'integrazione riscriviamo l'integrale n-esimo come

$$\text{ }_n = 2\int_{0}^{1} \left(1 - x^{2n}\right)^{1/(2n)} dx\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Facciamo la sostituzione $u = x^{2n}$, da cui $x = u^{1/(2n)}$ e $dx = u^{1/(2n)-1} du/(2n)$, per l'integrale si ha

$$\text{ }_n = \frac{1}{n}\int_{0}^{1} (1-u)^{1/(2n)}\, u^{1/(2n)-1} du\,.$$

Possiamo usare la rappresentazione della funzione beta di Eulero fatta con l'integrale di Eulero di primo tipo

$$\beta(a,b) = \int_{0}^{1} (1-t)^{a-1}\, t^{b-1} dt\,,$$

convergente per: $\mathrm{Re}(a) > 0$ e $\mathrm{Re}(b) > 0$.

Confrontando con l'ultima espressione ottenuta per $_n$, poiché le condizioni: $\mathrm{Re}\,(1/(2n)+1) > 0$ e $\mathrm{Re}\,(1/(2n)) > 0$ sono soddisfatte $\forall\, n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\text{ }_n = \frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{2n}+1, \frac{1}{2n}\right).$$

Usando, infine, la formula che mette in relazione la funzione beta di Eulero con le funzioni gamma

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

l'integrale n-esimo vale

$$\text{ }_n = \frac{1}{n}\frac{\Gamma(1/(2n)+1)\Gamma(1/(2n))}{\Gamma(1/n+1)} = \frac{\Gamma(1/(2n)+1)\Gamma(1/(2n))}{\Gamma(1/n)} = \frac{\Gamma^2(1/(2n))}{2n\,\Gamma(1/n)}$$

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si dimostri l'identità

$$\frac{\Gamma(z/2)}{\Gamma(z)} = \frac{2^{-z+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2+1/2)}.$$

Soluzione del secondo problema

Usiamo la funzione beta di Eulero nella sua rappresentazione in forma di integrale di Eulero di primo tipo,

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt, \qquad \text{con: } \mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0.$$

Facendo la sostituzione $t = \cos^2(\theta)$, da cui si ha il differenziale: $dt = -2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta$ e gli estremi d'integrazione: $t = 0 \to \theta = \pi/2$, $t = 1 \to \theta = 0$, si ha

$$\beta(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2a-1}(\theta)\cos^{2b-1}(\theta)d\theta,$$

convergente sempre nei semipiani delle parti reali positive delle variabili complesse a e b. La funzione beta ha inoltre l'interessate proprietà di essere esprimibile in termini di funzioni gamma come

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Consideriamo il caso in cui $a = b \equiv z/2$ e usiamo la rappresentazione integrale con le funzioni trigonometriche, sempre assumendo le condizioni di convergenza, che in questo caso sono un'unica condizione $\mathrm{Re}(z/2) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\beta\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{z-1}(\theta)\cos^{z-1}(\theta)d\theta,$$

con la formula di duplicazione della funzione seno, $\mathrm{sen}(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$, si ha

$$\beta\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2^{-z+2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{z-1}(2\theta)d\theta.$$

Facciamo la sostituzione $\omega = 2\theta$,

$$\beta\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2^{-z+1}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{z-1}(\omega)d\omega.$$

Sfruttiamo la simmetria della funzione seno rispetto a $\pi/2$ nell'intervallo $[0\pi]$, per riscrivere l'integrale precedente come

$$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^{z-1}(\omega)d\omega = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{z-1}(\omega)d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{sen}^{z-1}(\omega)d\omega,$$

nel secondo facciamo la sostituzione $\eta = \pi - \omega$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega - \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen}^{z-1}(\pi-\eta)d\eta \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega + \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}(\pi)\cos(\eta) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(\eta))^{z-1}\, d\eta \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\eta)d\eta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega\,,
\end{aligned}$$

l'ultima espressione segue dell'identità degli integrale della precedenza. Usiamo questo risultato per riscrivere la rappresentazione integrale della funzione $\beta(z/2, z/2)$ e si ha

$$\beta\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2^{-z+1}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega = 2^{-z+2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega\,.$$

Questo integrale può essere posto nella forma della rappresentazione della funzione beta come integrale di primo tipo di Eulero con la funzioni trigonometriche

$$\beta\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2^{-z+2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{z-1}(\omega)d\omega = 2^{-z+1}\underbrace{2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2(z/2)-1}(\omega)\cos^{2(1/2)-1}(\omega)d\omega}_{=\beta(z/2,1/2)} = 2^{-z+1}\beta\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Si noti che quest'ultima rappresentazione converge poiché sono soddisfatte le condizioni: $\operatorname{Re}(z/2) > 0$, conseguente alla $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Re}(1/2) > 0$, che è immediata.
Avvalendosi ancora dell'espressione della funzione beta in termini delle funzioni gamma, si arriva all'identità

$$\frac{\Gamma^2(z/2)}{\Gamma(z)} = 2^{-z+1}\beta\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2^{-z+1}\frac{\Gamma(z/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z/2+1/2)}\,.$$

Inserendo il valore noto $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e semplificando si ha l'identità cercata

$$\frac{\Gamma(z/2)}{\Gamma(z)} = \frac{2^{-z+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2+1/2)}\,.$$

Infine, è importante osservare che le condizioni di convergenza delle rappresentazioni usate, una volta che tali rappresentazioni sono state calcolate, possono essere abbandonate e sostituite con quelle di analiticità delle funzioni coinvolte dell'identità, che sono, per definizione non meno stringenti.

Terzo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{ } = \int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{4+5x^2+x^4}dx\,.$$

Curiosità. L'immagine rappresenta la testa del robot gigante *Jeeg robot d'acciaio*, protagonista meccanico del *manga* giapponese omonimo concepito e realizzato a partire dal 1975, sia come fumetto che come cartone animato dal *mangaka* e sceneggiatore giapponese Gō Nagai (6 settembre 1945, Wajima, Giappone).

Soluzione del terzo problema

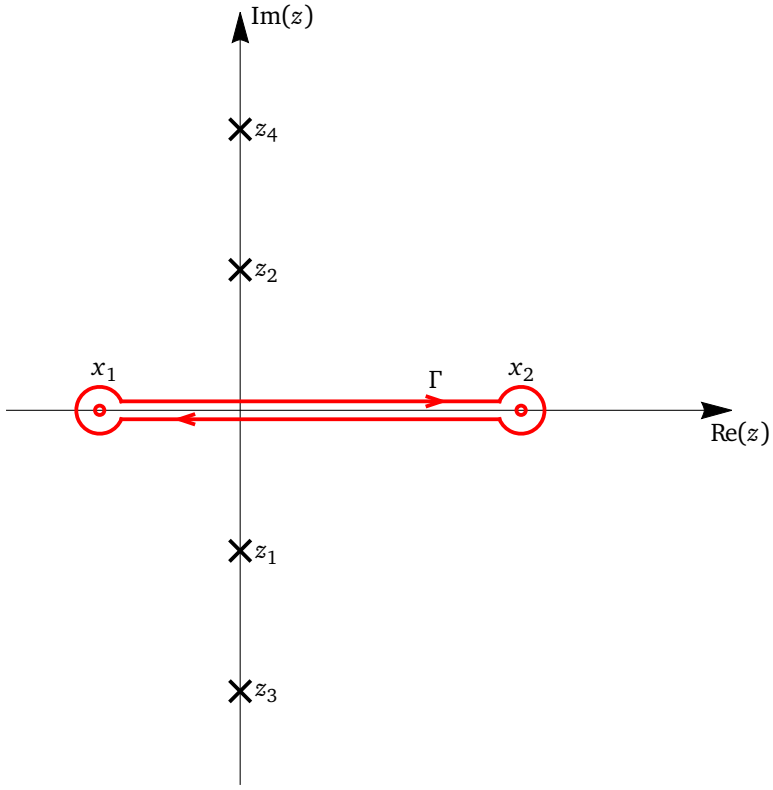
La funzione integranda è polidroma i punti di diramazione sono gli zeri del polinomio sotto radice a numeratore, sono

$$x_1 = -1\,, \qquad x_2 = 2$$

e hanno ordine di diramazione uno. I poli della funzione integranda sono gli zeri del polinomi del quarto grado a denominatore e sono

$$z_1 = -i\,, \qquad z_2 = i\,, \qquad z_3 = -2i\,, \qquad z_4 = 2i\,,$$

sono poli semplici.
Calcoliamo l'integrale sul percorso chiuso ad "osso" Γ, che nel piano complesso avvolge il segmento reale $(-1,2)$, indicato dalla curva in rosso nella figura sottostante. Nella stessa figura le "x" nere rappresentano le posizioni dei poli semplici dell'integranda, i cerchi rossi chiusi quelle dei punti di diramazione.



Il percorso chiuso è l'unione di due archi, che avvolgono i punti di diramazione x_1 e x_2, connessi da due tratti rettilinei paralleli all'asse reale, posti sopra e sotto lo stesso asse. Si ha

$$\begin{aligned}\Gamma = &\left(-\left\{z : z = x_1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\right\}\right) \cup [x_1 + \epsilon + i\epsilon, x_2 - \epsilon + i\epsilon] \\ &\cup \left(-\left\{z : z = x_2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon)\right\}\right) \cup [x_2 - \epsilon - i\epsilon, x_1 + \epsilon - i\epsilon]\,,\end{aligned}$$

dove con il simbolo $[w_1, w_2]$ si indica il percorso rettilineo che unisce i punti w_1 e w_2, ed è orientato nella direzione che va dal primo al secondo.
Al fine di porre la regione di discontinuità in corrispondenza del segmento reale $(-1,2)$, definiamo la funzione

$$r(z) = \sqrt{2 + z - z^2} = \sqrt{(1+z)(2-z)} = \sqrt{|1+z|e^{i\theta_1}|2-z|e^{i\theta_2}} = \sqrt{|1+z||2-z|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\,,$$

dove θ_1 e θ_2 sono le fasi dei binomi $(1+z)$ e $(2-z)$, che definiscono rispettivamente i punti di diramazione $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Con la scelta delle determinazioni $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ e $\theta_2 \in [-\pi, \pi]$ si hanno entrambi i tagli in avanti, sulla semiretta di sovrapposizione $(2, \infty)$ si cancellano, cosicché la discontinuità rimane solo sul segmento di $(-1,2)$ ed

è dovuta al solo taglio della funzione $\sqrt{1+z}$.
Sui tratti rettilinei di Γ immersi nel semipiano delle parti immaginarie positive e negative si hanno

$$\begin{aligned}
&\text{su } [x_1+\epsilon+i\epsilon, x_2-\epsilon+i\epsilon]: \qquad \theta_1 \to 0^+\,, \qquad \theta_2 \to 0^-\,,\\
&\text{su } [x_2-\epsilon-i\epsilon, x_1+\epsilon-i\epsilon]: \qquad \theta_1 \to 2\pi^-\,, \qquad \theta_2 \to 0^+\,,
\end{aligned}$$

quindi, per la funzione $r(z)$, con $x = \mathrm{Re}(z) \in (-1,2)$, si hanno le espressioni

$$\begin{aligned}
&\text{su } [x_1+\epsilon+i\epsilon, x_2-\epsilon+i\epsilon]: \qquad r(z) = \sqrt{(1+x)(2-x)}\,,\\
&\text{su } [x_2-\epsilon-i\epsilon, x_1+\epsilon-i\epsilon]: \qquad r(z) = \sqrt{(1+x)(2-x)}e^{i\pi} = -\sqrt{(1+x)(2-x)}\,.
\end{aligned}$$

Nel limite $\epsilon \to 0^+$, i contributi sugli archi centrati nei punti di diramazione si annullano.
Infatti, posti $z = x_1 + \epsilon e^{i\theta} = -1 + \epsilon e^{i\theta}$ e $z^2 = 1 - 2\epsilon e^{i\theta}$, a meno di ordini superiori in ϵ, nel limite $\epsilon \to 0^+$,

$$0 \le \left| \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}(z-x_1) \right| = \frac{|1+z|^{3/2}|2-z|^{1/2}}{|z^2+1||z^2+4|} = \frac{\epsilon^{3/2}\left|3-\epsilon e^{i\theta}\right|^{1/2}}{\left|2-2\epsilon e^{i\theta}\right|\left|5-2\epsilon e^{i\theta}\right|} \le \frac{\epsilon^{3/2}(3+\epsilon)^{1/2}}{(2-2\epsilon)(5-2\epsilon)} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

Allo stesso modo, con $z = x_2 + \epsilon e^{i\theta} = 2 + \epsilon e^{i\theta}$ e $z^2 = 4 + 4\epsilon e^{i\theta}$, sempre a meno di ordini superiori in ϵ, nel limite $\epsilon \to 0^+$,

$$0 \le \left| \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}(z-x_2) \right| = \frac{|1+z|^{1/2}|2-z|^{3/2}}{|z^2+1||z^2+4|} = \frac{\epsilon^{3/2}\left|3+\epsilon e^{i\theta}\right|^{3/2}}{\left|5+4\epsilon e^{i\theta}\right|\left|8+4\epsilon e^{i\theta}\right|} \le \frac{\epsilon^{3/2}(3+\epsilon)^{1/2}}{(5-4\epsilon)(8-4\epsilon)} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

L'integrale sul percorso chiuso Γ nel limite $\epsilon \to 0^+$ si riduce ai soli contributi sui tratti rettilinei, sui quali la funzione integranda assume valori opposti,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_\Gamma \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}dz = \int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{4+5x^2+x^4}dx - \int_{2}^{-1} \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{4+5x^2+x^4}dx = 2\int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{2+x-x^2}}{4+5x^2+x^4}dx = 2\,.$$

Il valore dell'integrale può essere ottenuto con il teorema dei residui e si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_\Gamma \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}, z_k\right],$$

dove i residui sono relativi ai poli esterni al percorso chiuso Γ che è orientato negativamente, ovvero in senso orario. È inoltre immediato verificare che il residuo all'infinito è nullo. Dalle due espressione precedenti segue

$$= i\pi \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}, z_k\right].$$

Calcoliamo i residui. Il primo è quello nel polo semplice $z_1 = -i$, quindi si ha

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}, -i\right] = \lim_{z\to -i} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}(z+i) = \lim_{z\to -i} \frac{\sqrt{2+z-z^2}}{(z-i)(z^2+4)} = \frac{r(-i)}{-6i} = i\frac{r(-i)}{6}\,,$$

la funzione $r(-i)$ vale

$$r(-i) = \sqrt{|1+z||2-z|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\Big|_{z=-i} = \sqrt{|1-i||2+i|}e^{i(7\pi/8+\arctan(1/2)/2)} = -10^{1/4}e^{i(-\pi/8+\arctan(1/2)/2)}\,,$$

si ha

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4}, i\right] = -i\frac{10^{1/4}}{6}e^{i(-\pi/8+\arctan(1/2)/2)}\,.$$

N.B. È importante spiegare come la scelta delle fasi θ_1 e θ_2 debba essere fatta coerentemente con la definizione iniziale. Prendiamo il primo residuo come caso di studio. Dal binomio $(1+z)$ con $z = -i$ si ottiene il numero complesso $1-i$, che si trova nel quarto quadrante del piano complesso. La sua fase θ_1 potrebbe essere $-\pi/4$, se la

determinazione scelta fosse $[-\pi,\pi]$; $7\pi/4$ se, invece, la determinazione fosse $[0,2\pi]$. Poiché, per la fase θ_1 abbiamo definito la determinazione $[0,2\pi]$, scriviamo

$$1-i=|1-i|e^{i\theta_1}=\sqrt{2}\,e^{7i\pi/4}\,.$$

Per il secondo binomio $(2-z)$, procediamo seguendo la stessa logica. Posto $z=-i$ si ha il numero complesso $2+i$, che si trova nel primo quadrante del piano complesso. In questo caso non c'è ambiguità, infatti, con entrambe le determinazioni si ottiene la stessa fase $\theta_2=\arctan(1/2)\in(0,\pi/2)$. Quindi possiamo scrivere

$$1+2i=|1+2i|e^{i\theta_2}=\sqrt{5}\,e^{i\arctan(1/2)}\,.$$

Per gli altri tre residui useremo questa procedura per l'identificazione della fasi, senza, però, ripercorrerne tutti i passaggi.
Il secondo residuo, in $z_2=i$, seguendo quanto fatto per il primo, vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},i\right]=\lim_{z\to i}\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{(z+i)(z^2+4)}=\frac{r(i)}{6i}=-i\frac{r(i)}{6}\,,$$

in questo caso, per la funzione $r(i)$ si ha

$$r(i)=\left.\sqrt{|1+z||2-z|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\right|_{z=i}=\sqrt{|1+i||2-i|}e^{i(\pi/8+\pi-\arctan(1/2)/2)}=-10^{1/4}e^{i(\pi/8-\arctan(1/2)/2)}\,,$$

quindi

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},i\right]=-i\frac{10^{1/4}}{6}e^{i(\pi/8-\arctan(1/2)/2)}\,.$$

La somma dei primi due residui è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},i\right]=-i\frac{10^{1/4}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\arctan(1/2)}{2}\right).$$

Scriviamo la funzione avvalendoci della formula di duplicazione

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1\,,$$

da cui si arriva alla formula che useremo

$$\cos(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}}\,.$$

Poiché il valore di $\cos(\pi/8-\arctan(1/2)/2)$ è positivo, in quanto: $-\pi/2<\pi/8-\arctan(1/2)/2<\pi/2$, consideriamo la soluzione positiva dell'espressione precedente e si ha

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\arctan(1/2)}{2}\right)&=\sqrt{\frac{\cos(\pi/4-\arctan(1/2))+1}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\cos(\arctan(1/2))+\operatorname{sen}(\arctan(1/2))}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

Per calcolare le funzioni coseno e seno dell'arcotangente di un numero, sfruttiamo le relazioni

$$\tan^2(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}-1\qquad\Rightarrow\qquad\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\tan^2(\alpha)+1}}\,,\quad\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{\tan^2(\alpha)+1}}\,,$$

da cui si hanno i valori cercati

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{1/4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\qquad\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1/2}{\sqrt{1/4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

e la funzione coseno iniziale vale

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\arctan(1/2)}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cos(\arctan(1/2))+\operatorname{sen}(\arctan(1/2))}{\sqrt{2}}+1}=\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{10}}+\frac{1}{2}}\,.$$

La somma dei residui può essere espressa come

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},i\right]=i\frac{10^{1/4}}{3}\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{10}}+\frac{1}{2}}=\frac{i}{3\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{10}}.$$

Il terzo residuo in $z_3=-2i$ è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-2i\right]=\lim_{z\to-2i}\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{(z^2+1)(z-2i)}=-i\frac{r(-2i)}{12},$$

che, usando il valore della funzione

$$r(-2i)=\sqrt{|1-2i||2+2i|}e^{i(2\pi-\arctan(2)+\pi/4)/2}=-\sqrt{2\sqrt{10}}e^{i(-\arctan(2)/2+\pi/8)},$$

ha il valore

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-2i\right]=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{12}e^{i(-\arctan(2)/2+\pi/8)}.$$

Infine, il residuo in $z_4=2i$ è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},2i\right]=\lim_{z\to2i}\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{(z^2+1)(z+2i)}=i\frac{r(2i)}{12},$$

con

$$r(2i)=\sqrt{|1+2i||2-2i|}e^{i(\arctan(2)-\pi/4)/2}=\sqrt{2\sqrt{10}}e^{i(\arctan(2)/2-\pi/8)},$$

si ha

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},2i\right]=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{12}e^{i(\arctan(2)/2-\pi/8)}.$$

Sommiamo il terzo e il quarto residuo

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-2i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},2i\right]&=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{6}\cos\left(\frac{\arctan(2)}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\\&=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{\cos(\arctan(2)-\pi/4)+1}{2}}\\&=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{\cos(\arctan(2))+\operatorname{sen}(\arctan(2))}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

da cui, usando le espressioni

$$\cos(\arctan(2))=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \operatorname{sen}(\arctan(2))=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

si ottiene

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},-2i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},2i\right]=i\frac{10^{1/4}\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{10}}+\frac{1}{2}}=\frac{i}{6}\sqrt{3+\sqrt{10}}.$$

Infine, il risultato è

$$\text{ }=i\pi\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{2+z-z^2}}{4+5z^2+z^4},z_k\right]=\pi\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{10}}-\frac{1}{6}\sqrt{3+\sqrt{10}}\right),$$

che un po' di semplice aritmetica si semplifica in

$$\text{ }=\frac{\pi}{6}\left(-1+\sqrt{2}\right)\sqrt{3+\sqrt{10}}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert E_N a $N \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ dimensioni, ha le seguenti proprietà:

- $\hat{A}^3 = \hat{I}$, dove $\hat{I}$ è l'operatore identità;
- $\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right) \in \mathbb{R}$;
- $\nexists |x\rangle \in E_N$, tel che: $\hat{A}|x\rangle = |x\rangle$.

Dopo aver classificato l'operatore $\hat{A}$,

- si dimostri che N è pari;
- si ottenga lo spettro discreto dell'operatore;
- se ne calcoli il determinante $\det\left(\hat{A}\right)$;
- si calcolino, in funzione della dimensione dello spazio di Hilbert N, le tracce delle potenze k-esime dello stesso operatore, cioè: $\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^k\right)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Soluzione del quarto problema

Dalla condizione $\hat{A}^3 = \hat{I}$ si evince che gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ sono solo le radici terze dell'unità.
Infatti, indicando con $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ l'insieme degli autovalori e quello dei corrispondenti autovettori dell'operatore $\hat{A}$, per cui si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \lambda_k|a_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

si ha che la terza potenza dell'operatore $\hat{A}^3$ ha gli stessi autovettori, con autovalori pari alle terze potenze di quelli dell'operatore $\hat{A}$, quindi le equazioni agli autovalori dell'operatore $\hat{A}^3$ sono

$$\hat{A}^3|a_k\rangle = \lambda_k^3|a_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Poiché, come dato dal problema, $\hat{A}^3 = \hat{I}$, dalle precedenti equazioni si ottengono

$$\hat{A}^3|a_k\rangle = |a_k\rangle = \lambda_k^3|a_k\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k^3 = 1\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

ovvero gli autovalori sono solo le tre radici terze dell'unità: $e^{2ik\pi/3}$, con $k = 0,1,2$. La prima di queste radici, con $k = 0$ è proprio l'unità e l'equazione corrispondente sarebbe

$$\hat{A}|a_0\rangle = |a_0\rangle\,,$$

ma la terza proprietà dell'operatore $\hat{A}$ sancisce la non esistenza di un vettore che verifichi questa equazione, da qui l'uso del condizionale. Ne consegue che, delle tre radici terze dell'unità solo le due non reali, che indichiamo con $\lambda_1 = e^{2i\pi/3}$ e $\lambda_2 = e^{4i\pi/3}$ possono appartenere allo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$, che quindi contiene al più due valori distinti. Allora, se $N > 2$ si avrà degenerazione, ovvero almeno uno degli autovalori avrà molteplicità algebrica maggiore di uno.
Gli autovalori sono solo delle fasi pure, quindi l'operatore è unitario.
Poiché gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare, cioè dell'equazione

$$\det\left(\lambda\hat{I} - \hat{A}\right) = 0\,,$$

il polinomio in λ a primo membro, che è di grado N, avrà la forma

$$(\lambda - \lambda_1)^{\beta_1}\,(\lambda - \lambda_2)^{\beta_2} = 0\,,$$

dove $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ sono le molteplicità algebriche degli autovalori λ_1 e λ_2 e sono tali che: $\beta_1 + \beta_2 = N$.
La traccia dell'operatore $\hat{A}$ è reale, in termini degli autovalori si ha

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right) = \sum_{j=1}^{\beta_1}\lambda_1 + \sum_{j=1}^{\beta_2}\lambda_2 = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2\,,$$

usando i valori noti $\lambda_1 = e^{2i\pi/3}$ e $\lambda_2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$, unitamente alla formula di Eulero per le fasi, si ha

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right) = \beta_1 e^{2i\pi/3} + \beta_2 e^{-2i\pi/3} = (\beta_1 + \beta_2)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,(\beta_1 - \beta_2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1 - \beta_2)\,.$$

La condizione di realtà della traccia implica la nullità della sua parte immaginaria, cioè

$$0 = \mathrm{Im}\left(\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1 - \beta_2) \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = \beta_2\,.$$

Poiché, $N = \beta_1 + \beta_2$, si ha

$$N = 2\beta_1 = 2\beta_2\,,$$

per cui N è un numero pari.
Lo spettro discreto dell'operatore e quindi i suoi autovalori sono $\lambda_1 = e^{2i\pi/3}$ con ordine di degenerazione $N/2$ e $\lambda_2 = e^{-2i\pi/3}$ con lo stesso ordine di degenerazione $N/2$.
Il determinante dell'operatore è il prodotto dei suoi autovalori, si ha

$$\det\left(\hat{A}\right) = \lambda_1^{N/2}\lambda_2^{N/2} = (\lambda_1\lambda_2)^{N/2} = \left(e^{2i\pi/3}e^{4i\pi/3}\right)^{N/2} = \left(e^{2i\pi/3}e^{-2i\pi/3}\right)^{N/2} = 1\,,$$

nel quarto e nel quinto membro abbiamo usato le due espressioni dell'autovalore λ_2 per mostrare che il risultato è indipendente dalla scelta.
L'operatore ha determinante uguale a uno, cioè: $\det\left(\hat{A}\right) = 1$.
La traccia della k-esima potenza dell'operatore $\hat{A}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, è la somma dei sui autovalori. Dal teorema ottico si deduce che gli autovalori dell'operatore $\hat{A}^k$ sono le potenze k-esime di quelli dell'operatore $\hat{A}$ e hanno gli stessi ordini di degenerazione, quindi ci saranno $N/2$ autovalori $\lambda_1^k = e^{2ik\pi/3}$ e $N/2$ autovalori $\lambda_2^k = e^{4ik\pi/3} = e^{-2ik\pi/3}$.
Consideriamo le due possibili scelte per l'autovalore λ_2^k, nel primo caso $\lambda_2^k = e^{4i\pi k/3}$ si ha

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^k\right) = \frac{N}{2}\left(e^{2ik\pi/3} + e^{4ik\pi/3}\right) = \frac{N}{2}\underbrace{e^{ik\pi}}_{=(-1)^k}\underbrace{\left(e^{-ik\pi/3} + e^{ik\pi/3}\right)}_{2\cos(k\pi/3)} = N(-1)^k\cos(k\pi/3)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Con $\lambda_2^k = e^{-2ik\pi/3}$, si ottiene invece

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^k\right) = \frac{N}{2}\underbrace{\left(e^{2ik\pi/3} + e^{2ik\pi/3}\right)}_{2\cos(2k\pi/3)} = N\cos(2k\pi/3)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

I due risultati coincidono, infatti, scrivendo l'argomento della funzione coseno dell'ultima espressione come $2k\pi/3 = k\pi - k\pi/3$ e usando la formula di somma della funzione coseno,

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^k\right) = N\cos(k\pi - k\pi/3) = N\Big(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}\cos(k\pi/3) + \underbrace{\mathrm{sen}(k\pi)}_{=0}\,\mathrm{sen}(k\pi/3)\Big) = N(-1)^k\cos(k\pi/3)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

In definitiva, la traccia cercata è

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^k\right) = N(-1)^k\cos(k\pi/3)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{B}$ è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensione R_3 dalle azioni

$$\hat{B}|u_j\rangle = \sum_{k=1}^{3}\left(1+\delta_j^k\right)|u_k\rangle\,, \qquad \forall\, j\in\{1,2,3\}\,,$$

sui vettori della base ortonormale $\left\{|u_j\rangle\right\}_{j=1}^{3}\subset R_3$ dello spazio di Hilbert.
Si ottenga la matrice 3×3 che rappresenta, rispetto alla base ortonormale $\left\{|u_j\rangle\right\}_{j=1}^{3}\subset R_3$, l'operatore

$$\hat{C} = \widehat{\Gamma\left(\hat{B}\right)},$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero.

Soluzione del quinto problema

La matrice B, che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ rispetto alla base ortonormale $\left\{|u_j\rangle\right\}_{j=1}^{3}\subset R_3$, ha elementi

$$B_j^l = \langle u_l|\hat{B}|u_j\rangle = \langle u_l|\sum_{k=1}^{3}\left(1+\delta_j^k\right)|u_k\rangle = 1+\delta_j^l\,, \qquad \forall\, l,j\in\{1,2,3\}\,,$$

in forma estesa

$$\hat{B}\overset{u}{\hookleftarrow} B = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è simmetrica e reale, ne consegue che l'operatore è hermitiano, quindi diagonalizzabile e si può usare il teorema spettrale. In particolare, indicando con B_d la matrice diagonale che rappresenta lo stesso operatore $\hat{B}$ rispetto alla base dei suoi autovettori, si ha

$$B_d = \mathrm{diag}\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)\,,$$

dove β_j è il j-esimo autovalore, con $j=1,2,3$. La matrice, anch'essa diagonale C_d, che rappresenta l'operatore $\hat{C}$ rispetto alla base degli autovettori dell'operatore $\hat{B}$, che sono anche autovettori dell'operatore $\hat{C}$, è

$$C_d = \mathrm{diag}\left(\Gamma(\beta_1),\Gamma(\beta_2),\Gamma(\beta_3)\right)\,.$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare, che, indicando con I la matrice identità 3×3, ha la forma

$$\begin{aligned} \det\left(B-\beta I\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\beta & 1 & 1 \\ 1 & 2-\beta & 1 \\ 1 & 1 & 2-\beta \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-\beta)\left[(2-\beta)^2-1\right]-(2-\beta-1)+1-(2-\beta) &= 0 \\ (2-\beta)(\beta-1)(\beta-3)+2(\beta-1) &= 0 \\ (\beta-1)(-\beta^2+5\beta-4) &= 0\,, \end{aligned}$$

le soluzioni sono

$$\beta_1 = 1\,, \qquad \beta_2 = 1\,, \qquad \beta_3 = 4\,.$$

Si hanno due autovalori distinti, infatti, $\beta_{1,2}=1$ è degenere con ordine di degenerazione 2, mentre $\beta_3=4$ non è degenere. Le equazioni agli autovalori per gli operatori $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono

$$\hat{B}|b_k\rangle = \beta_k|b_k\rangle\,, \qquad \hat{C}|b_k\rangle = \Gamma(\beta_k)|b_k\rangle\,, \qquad k\in\{1,2,3\}\,,$$

dove $|b_k\rangle$ è il k-esimo autovettore, relativo cioè al k-esimo autovalore β_k, con $k=1,2,3$. Le componenti dei vettori 3×1 dell'insieme $\{b_k\}_{k=1}^3$, che rappresentano gli autovettori rispetto alla base canonica, ovvero: $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^3 \overset{u}{\hookleftarrow} \{b_k\}_{k=1}^3$, si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$(B-\beta_k I)b_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\beta_k & 1 & 1 \\ 1 & 2-\beta_k & 1 \\ 1 & 1 & 2-\beta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ b_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k=1,2,3,$$

dove b_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $k,j\in\{1,2,3\}$.
Posto $b_1^1=b_2^1=b_3^1\equiv b$, dalle prime due equazioni dei sistemi, per $k=1,2,3$ si hanno rispettivamente

$$\begin{cases} b_1^2+b_1^3=-b \\ b_1^2+b_1^3=-b \end{cases}, \qquad \begin{cases} b_2^2+b_2^3=-b \\ b_2^2+b_2^3=-b \end{cases}, \qquad \begin{cases} b_3^2+b_3^3=2b \\ -2b_3^2+b_3^3=-b \end{cases}.$$

I primi due sistemi sono uguali e sono uguali anche le loro due equazioni, scegliamo le componenti in modo che i vettori b_1 e b_2 siano ortogonali, cioè richiediamo

$$0=b_1^\dagger b_2=\begin{pmatrix} b & b_1^2 & \left(-b-b_1^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b_2^2 \\ -b-b_2^2 \end{pmatrix} = b^2+b_1^2b_2^2+\left(b+b_1^2\right)\left(b+b_2^2\right)=2b^2+2b_1^2b_2^2+b\left(b_1^2+b_2^2\right).$$

Scegliendo il valore comune $b_1^2=b_2^2\equiv c$, si ha

$$2c^2+2cb+2b^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad c_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4b^2}}{2}=b\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=be^{\pm 2i\pi/3},$$

assegniamo, quindi, i valori: $b_{1,2}^2=be^{\pm 2i\pi/3}$, $b_{1,2}^3=-b-b_{1,2}^2=b\left(-1-e^{\pm 2i\pi/3}\right)=be^{\mp 2i\pi/3}$.
Dal terzo sistema, invece, si ottengono le componenti del terzo vettore: $b_3^2=b_3^3=b$.
Ne consegue che i vettori normalizzati sono

$$b_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix}, \qquad b_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}, \qquad b_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo posto $b=1/\sqrt{3}$ per tutti e tre i vettori. La matrice unitaria diagonalizzante U ha come elementi le componenti contro-varianti di questi vettori, cioè $U_j^k=b_j^k$, con $k,j\in\{1,2,3\}$, quindi

$$U=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e si hanno le relazioni di diagonalizzazione

$$U^\dagger BU=B_d=\mathrm{diag}\,(1,1,4)\,, \qquad U^\dagger CU=C_d=\mathrm{diag}\,(\Gamma(1),\Gamma(1),\Gamma(4))=\mathrm{diag}\,(1,1,6)\,.$$

La matrice cercata si ottiene invertendo la precedente identità ed è

$$\begin{aligned}
\hat{C}\overset{u}{\hookleftarrow} C=UC_dU^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & e^{-2i\pi/3}/\sqrt{3} & e^{2i\pi/3}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ e^{2i\pi/3} & e^{-2i\pi/3} & 6 \\ e^{-2i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & e^{2i\pi/3} & e^{-2i\pi/3} \\ 1 & e^{-2i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

infine, inserendo il fattore 1/3, si ha

$$C = \begin{pmatrix} 8/3 & 5/3 & 5/3 \\ 5/3 & 5/3 & 8/3 \\ 5/3 & 8/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\text{🎁}(x) = \ln\left(x^4 + 1\right).$$

Curiosità. L'immagine 🎁 rappresenta la testa del robot gigante *Daitarn 3*, protagonista meccanico del *manga* giapponese omonimo concepito e realizzato a partire dal 1978, sia come fumetto che come cartone animato dal *mangaka*, scrittore e sceneggiatore Yoshiyuki Tomino (5 novembre 1941, Odawara, Giappone), con i disegni di Kunio Ōkawara (26 dicembre 1947, Inagi, Giappone).

Soluzione del sesto Problema

Usiamo la proprietà delle derivate per le trasformate di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathscr{F}_k[f],$$

dove $f(x)$ è una funzione che, assieme alla sua derivata n-esima, con $n \in \mathbb{N}$, ammette trasformata di Fourier. Riscriviamo la funzione polidroma data come

$$\text{🎁}(x) = \sum_{j=0}^{4} \ln(x - z_j),$$

dove $\left\{z_j = e^{(2j+1)i\pi/4}\right\}_{j=0}^{3}$ è l'insieme dei punti di diramazione, ovvero degli zeri del polinomio di quarto grado che rappresenta l'argomento della funzione logaritmo naturale. La derivata prima di questa funzione è

$$\frac{d\,\text{🎁}}{dx} = \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{x - z_j}.$$

Calcoliamo le trasformate di Fourier dei poli semplici che sono i termini della somma precedente. Distinguiamo i casi dei primi due valori z_0 e z_1, che sono numeri complessi con parti immaginarie positive e dei secondi due valori z_2 e z_3 cha hanno invece parti immaginarie negative. La trasformata di Fourier della somma dei primi due, con $j = 0, 1$, si ottiene usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui nel semipiano delle parti immaginarie positive, come

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x - z_0} + \frac{1}{x - z_1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x - z_0} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x - z_1} dx\right) \\
&= i\sqrt{2\pi}\theta(-k)\left(\operatorname{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z - z_0}, z_0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z - z_1}, z_1\right]\right) \\
&= i\sqrt{2\pi}\theta(-k)\left(e^{-ikz_0} + e^{-ikz_1}\right) = i\sqrt{2\pi}\theta(-k)\left(e^{-ik(1+i)/\sqrt{2}} + e^{-ik(-1+i)/\sqrt{2}}\right) \\
&= i\sqrt{2\pi}\theta(-k)e^{k/\sqrt{2}}\left(e^{-ik/\sqrt{2}} + e^{ik/\sqrt{2}}\right) = 2i\sqrt{2\pi}\theta(-k)e^{k/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2i\sqrt{2\pi}\theta(-k)e^{-|k|/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier della somma degli ultimi due poli z_2 e z_3, usando, in questo caso, il lemma di Jordan nel semipiano delle parti immaginarie negative, vale

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-z_2}+\frac{1}{x-z_3}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-z_2}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-z_3}dx\right)\\
&= -i\sqrt{2\pi}\theta(k)\left(\operatorname{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z-z_2},z_2\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z-z_3},z_3\right]\right)\\
&= -i\sqrt{2\pi}\theta(k)\left(e^{-ikz_2}+e^{-ikz_3}\right)=-i\sqrt{2\pi}\theta(k)\left(e^{-ik(-1-i)/\sqrt{2}}+e^{-ik(1-i)/\sqrt{2}}\right)\\
&= -i\sqrt{2\pi}\theta(k)e^{-k/\sqrt{2}}\left(e^{ik/\sqrt{2}}+e^{-ik/\sqrt{2}}\right)=-2i\sqrt{2\pi}\theta(k)e^{-k/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\\
&= -2i\sqrt{2\pi}\theta(k)e^{-|k|/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

A meno dei fattori $\theta(-k)$ e $-\theta(k)$ e ricordando la parità della funzione coseno, le due espressioni precedenti coincidono. La trasformata di Fourier della somma completa è

$$\mathscr{F}_k\left[\sum_{j=0}^{3}\frac{1}{x-z_j}\right]=-2i\sqrt{2\pi}e^{-|k|/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{(\theta(k)-\theta(-k))}_{\text{Segno}[k]}=-2i\sqrt{2\pi}e^{-|k|/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\text{Segno}[k].$$

Questa è la trasformata di Fourier della derivata prima della funzione data (x), quindi

$$\mathscr{F}_k\left[\text{\textcircled{\textbf{?}}}\right]=\frac{1}{ik}\mathscr{F}_k\left[\frac{d\,\text{\textcircled{\textbf{?}}}}{dx}\right]=-2\sqrt{2\pi}e^{-|k|/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\text{Segno}[k]\frac{1}{k}}_{1/|k|},$$

da cui il risultato finale

$$\mathscr{F}_k\left[\text{\textcircled{\textbf{?}}}\right]=-2\sqrt{2\pi}\frac{e^{-|k|/\sqrt{2}}}{|k|}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right).$$